Schwierige lineare Gleichungen

Gleichungen, in denen neben Produkten aus Summen und Differenzen auch binomische Formeln vorkommen, die aber letztendlich zu linearen Gleichungen führen, bezeichnet man mit schwierigen linearen Gleichungen. Sie sind deshalb schwierig, weil man zu den Vorzeichenregeln, dem Bruchrechnen und dem normalen Ausmultiplizieren eben auch noch die binomischen Formeln und die Produkte aus Summen und Differenzen beherrschen muss. Es ist ratsam, den Lösungsalgorithmus für das Lösen linearer Gleichungen strikt anzuwenden. „Zaubern" sollte man erst, wenn man die vorher genannten Rechentechniken perfekt ausüben kann. Jetzt aber zum ersten einführenden Beispiel, wie immer recht einfach gehalten:

$$(x-3)(x+3)=(x+4)^2-5(x-7)\,.$$

Auf der linken Seite der Gleichung wendet man die dritte binomische Formel an, auf der rechten Seite die erste binomische Formel und das Distributivgesetz, wobei hier Vorzeichenregeln beachtet müssen. Man kommt dann zu folgendem Ergebnis:

$$x^2-9=x^2+8x+16-5x+35\,.$$

Nun fasst man die Termglieder auf der rechten Seite der Gleichung zusammen,

$$\Leftrightarrow \quad x^2-9=x^2+3x+51$$

anschließend beginnt man mit den Äquivalenzumformungen:

$$\begin{array}{lcl}
 & x^2-9=x^2+3x+51 & \mid -x^2 \\
\Leftrightarrow & x^2-9-x^2=x^2+3x+51-x^2 & \\
\Leftrightarrow & -9=+3x+51 & \mid -51 \\
\Leftrightarrow & -9-51=3x+51-51 & \\
\Leftrightarrow & -60=3x & \mid \div 3 \\
\Leftrightarrow & -60\div 3=3x\div 3 & \\
\Leftrightarrow & -20=x & \\
\Rightarrow & L=\{-20\} &
\end{array}$$

Jetzt wird der Schwierigkeitsgrad erhöht, in dem man den Gleichungstyp mit Brüchen garniert:

$$\frac{(c-1)^2}{3}-\frac{(c-5)(c+5)}{6}=\left(\frac{1}{2}c-4\right)\left(\frac{1}{3}c+1\right).$$

Man beginnt mit dem Ausmultiplizieren der Klammern und setzt die Nenner als Faktoren auf der linken Seite der Gleichung vor die jeweiligen Binome.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(c^2-2c+1)-\frac{1}{6}(c^2-25)=\frac{1}{6}c^2+\frac{1}{2}c-\frac{4}{3}c-4$$

Beide Seiten der Gleichung werden anschließend mit dem Hauptnenner, dem kgV(2;3;6) = 6, multipliziert. Dabei muss immer darauf geachtet werden, dass man auch jeden einzelnen Summanden berücksichtigt und dass man in der Folge die Brüche kürzt, bevor man sie abschließend multipliziert.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}(c^2-2c+1)-\frac{1}{6}(c^2-25)=\frac{1}{6}c^2+\frac{1}{2}c-\frac{4}{3}c-4 \quad |\cdot 6\\
\Leftrightarrow\quad & 6\cdot[\frac{1}{3}(c^2-2c+1)-\frac{1}{6}(c^2-25)]=6\cdot[\frac{1}{6}c^2+\frac{1}{2}c-\frac{4}{3}c-4]\\
\Leftrightarrow\quad & 6\cdot\frac{1}{3}(c^2-2c+1)-6\cdot\frac{1}{6}(c^2-25)=6\cdot\frac{1}{6}c^2+6\cdot\frac{1}{2}c-6\cdot\frac{4}{3}c-6\cdot 4\\
\Leftrightarrow\quad & 2(c^2-2c+1)-(c^2-25)=c^2+3c-8c-24
\end{aligned}$$

Jetzt multipliziert man die Klammern aus und fasst die Terme zusammen, die zusammengehören.

$$\begin{aligned}
& 2(c^2-2c+1)-(c^2-25)=c^2+3c-8c-24\\
\Leftrightarrow\quad & 2c^2-4c+2-c^2+25=c^2-5c-24\\
\Leftrightarrow\quad & c^2-4c+27=c^2-5c-24
\end{aligned}$$

Man hat sozusagen die Gleichung soweit vorbereitet bzw. gestylt, dass man mit den Äquivalenzumformungen ohne weitere Probleme beginnen kann.

$$\begin{aligned}
& c^2-4c+27=c^2-5c-24 \quad |-c^2\\
\Leftrightarrow\quad & c^2-4c+27-c^2=c^2-5c-24-c^2\\
\Leftrightarrow\quad & -4c+27=-5c-24 \quad |+5c\\
\Leftrightarrow\quad & -4c+27+5c=-5c-24+5c\\
\Leftrightarrow\quad & c+27=-24 \quad |-27\\
\Leftrightarrow\quad & c+27-27=-24-27\\
\Leftrightarrow\quad & c=-51\\
\Rightarrow\quad & L=\{-51\}
\end{aligned}$$

In dem dritten Beispiel wird wieder auf Kommentare und einzelne Zwischenschritte verzichtet.

$$5y(y-2)^2+\frac{1}{5}(4y-2)(8-5y)+5y=2(6y+4)(7-2y)-y(7-5y^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5y(y^2-4y+4)+\frac{1}{5}(32y-16-20y^2+10y)+5y=2(42y+28-12y^2-8y)-7y+5y^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 5y^3-20y^2+20y+\frac{1}{5}(42y-16-20y^2)+5y=2(34y+28-12y^2)-7y+5y^3 \quad |\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 25y^3-100y^2+100y+42y-16-20y^2+25y=340y+280-120y^2-35y+25y^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 25y^3-120y^2+167y-16=305y+280-120y^2+25y^3 \quad |-25y^3+120y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 167y-16=305y+280 \quad |-167y$$

$$\Leftrightarrow \quad -16=138y+280 \quad |-280$$

$$\Leftrightarrow \quad -296=138y \quad |\div 138$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{148}{69}=y$$

$$\Rightarrow \quad L=\{-\frac{148}{69}\}$$

Übungen:

a) $2(x+0{,}1)(0{,}5x+2)=(3+\frac{1}{3}x)(3-\frac{1}{3}x)+\frac{10}{9}x^2$

b) $3a(a-5)+2(3-2a)^2=2a(9+2a)+(5-3a)(2-5a)-8a^2$

c) $(\varphi-0{,}5)(\varphi+0{,}5)-(\varphi-0{,}2)^2+4{,}44=(\varphi+1{,}2)^2-(\varphi+0{,}3)^2$

d) $(8p+2)^2+4(p+5)(p-5)=(2p+3)^2-(5-8p)(5+8p)$